Couple de VAR - Vecteur aléatoire

1- Définitions

Définition Un couple de VAR est la donnée conjointe de deux variables (X,Y)
pour tout couple (x,y) de $Z(\Omega)=X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $(Z=(x,y))=(X=x,Y=y)=(X=x)\cap(Y=y)$.

Loi conjointe On appelle loi de probabilité conjointe de X et de Y l'application

$$\left\{\begin{array}{lcl} X(\Omega)\times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & P(X=x,Y=y)=P((X=x)\cap(Y=y)); \end{array}\right. \quad p_{i,j}=P(X=x_i,Y=y_j); \quad \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,s]\!]} p_{i,j}=1$$

Lois marginales : Les VAR X et Y sont appelés VAR marginales du couple $Z=(X,Y)$;

On note $p_{i\cdot}=P(X=x_i)$ et $p_{\cdot j}=P(Y=y_j)$; on alors $\forall i\in[\![1,r]\!],\ p_{i\cdot}=\displaystyle\sum_{j=1}^{s}p_{i,j}$

Loi de la somme de deux VAR entières :

Si $X(\Omega)=0,n[\![, Y(\Omega)=0,m[\![$ alors $Z(\Omega)=0,m+n[\![$ et $\forall z\in\mathbf{N}$, $P(Z=z)=\displaystyle\sum_{x=0}^{n}P(X=x)P(Y=z-x)$

Théorème de transfert : Soit $u\left\{\begin{array}{lcl}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}\\ (x,y) & \mapsto & u(x,y)\end{array}\right.$ et (X,Y) un couple de VAR alors on a :

$$E(u(X,Y))=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant s}}u(x_i,y_j)P((X=x_i)\cap(Y=y_j))=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant s}}u(x_i,y_j)p_{i,j}=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}u(x,y).P(X=x\cap Y=y)$$

Pour tout couple (X,Y) de VAR et tout couple (a,b) de réels, on a $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

Lois conditionnelles : Soit (X,Y) un couple de VAR sur Ω

Soit $y\in Y(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ est l'application $\forall x\in X(\Omega),\ P_{Y=y}(X=x)=\dfrac{P((X=x)\cap(Y=y))}{P(Y=y)}$

Couple de VAR indépendantes :

2 VAR sont indépendantes si et seulement si la loi conjointe est le produit des lois marginales :

$$\forall(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,s]\!],\ P((X=x_i)\cap(Y=y_j))=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$$

- si X et Y sont des VAR indépendantes et f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des VAR indépendantes.
- Si X et Y sont indépendants alors $E(XY)=E(X)E(Y)$

2- Corrélation linéaire

Covariance de X et de Y : $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]\underset{\text{Huygens}}{=}E(XY)-E(X)E(Y)$

- $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z)=a\mathrm{Cov}(X,Z)+b\mathrm{Cov}(Y,Z)$ (bilinéarité) ; $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $V(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)+b^2V(Y)$; $V(X+Y)=V(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+V(Y)$
- X et Y indépendants $\Rightarrow\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ (Réciproque fausse).

Coefficient de corrélation linéaire : $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

3- Famille de n variables aléatoires

vecteur aléatoire : $(X_1,X_2,\dots X_n)$ est un vecteur aléatoire sur Ω dont la loi conjointe est l'application

$$\left\{\begin{array}{lcl}X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\dots X_n(\Omega) & \to & [0,1]\\ (x_1,x_2,\dots x_n) & \mapsto & P[(X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\dots(X_n=x_n)]\end{array}\right.$$

Espérance : Soit $(X_1,X_2\dots X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur Ω, alors $E(X_1+X_2+\dots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots E(X_n)$

Indépendance : Soit $(X_1,X_2\dots X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur Ω, on dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si la loi conjointe est le produit des lois marginales c'est à dire

$$\forall(x_1,x_2,\dots x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots X_n(\Omega),\ P((X_1=x_1)\cap\cdots\cap(X_n=x_n))=P(X_1=x_1)\times\cdots\times P(X_n=x_n)$$

Propriétés des familles de VAR indépendantes

- Toute sous famille d'une famille de variables indépendants est une famille de variables mutuellement indépendants
- $(X_l,X_2,\dots,X_n,\dots,X_p)$ indépendantes $\Rightarrow(X_1,X_2,\dots,X_n)$ et $g(X_{n+1},\dots,X_p)$ indépendantes
- $(X_l,X_2,\dots,X_n,\dots,X_p)$ indépendantes $\Rightarrow f_1(X_1),\dots f_p(X_p)$ indépendantes .
- Si les VAR $X_1,\dots X_n$ sont indépendantes alors $V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}V(X_k)$

Loi Binomiale : La somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p est une VAR binomiale de paramètres n,p