Factorisation par $(x-a)$

Définition : On dit qu'un polynôme f est `factorisé sur` $\mathbb{R}$ `ou` C s'il existe deux polynômes P et Q de degré strictement supérieurs à 1 tels que $f = PQ$.

Définition : On dit que a est une `racine` du polynôme f si $f(a) = 0$.

Théorème : si a est un zéro de f alors il existe un polynôme Q tel que $f(x) = (x-a)Q(x)$.

Méthode Comment déterminer le polynôme Q

Si 0, 1, -1 ou 2 sont racines d'un polynôme, vous êtes censé vous en apercevoir.
Reste alors à factoriser en utilisant `la méthode des coefficients indéterminés`

▶$\deg(Q) = \deg(f) - 1$.

▶On écrit alors Q avec des coefficients génériques.

▶On détermine ces coefficients en développant le produit $(x-a)Q(x)$ et en le comparant coefficient par coefficient à ceux de f.

Exemple :

Factoriser $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30,\ x$ réel.

Solution : $f(2) = 0$ donc 2 est racine du polynôme et il existe un polynôme g tel que pour tout réel x,

$$f(x) = (x-2)g(x),$$

g est nécessairement de degré 2, donc il existe un triplet (a,b,c) tel que, pour tout réel x,

$$fx) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x-2)(ax^2+bx+c)$$
$$= ax^3 + (-2a+b)x^2 + (-2b+c)x - 2c.$$

L'égalité des polynômes pour tout x entraîne l'égalité des coefficients soit le système

$$\begin{cases} \text{Coefficient } x^3 : 1 = a \\ \text{Coefficient } x^2 : -10 = -2a + b \\ \text{Coefficient } x : 31 = -2b + c \\ \text{Constante} : -30 = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 15 \end{cases}$$

On peut accélérer les calculs en remarquant que les valeurs de a et de c peuvent être déterminés sans calcul et donc en cherchant g sous la forme $x^2 + bx + 15$.
Soit $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x-2)(x^2+bx+15)$
On cherche alors un coefficient, par exemple celui de x^2, on obtient :

$$\text{Coefficient } x^2 : -10 = -2 + b \Leftrightarrow b = -8.$$

On a donc $f(x) = (x-2)(x^2-8x+15)$. Il ne reste plus qu'à chercher les racines du trinôme (si elles existent - on travaille sur $\mathbb{R}$). $\Delta = 8^2 - 4 \times 15 = 64 - 60 = 4; x_1 = \frac{8+2}{2} = 5; x_2 = \frac{8-2}{2} = 3$, donc

$$\boxed{f(x) = (x-2)(x-3)(x-5)}$$

Exercice 1 : Résoudre les équations ou inéquations d'inconnu x réel :

1. $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x = 0$;

   $0; 1; 2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}.$

2. $x^4 + 2x^2 - 3 < 0$;

   On peut poser $X = x^2$ ou voir que 1 et - 1 sont des zéros et factoriser par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. La solution est $]-1;1[$

3. $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$;

   $1; \frac{3}{2}.$

4. $x\sqrt{x} - 3x + \sqrt{x} + 1 = 0$;

   On pose $X = \sqrt{x}$ et on obtient une équation du 3è degré, 1 est une racine évidente. Les solutions sont 1 et $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

5. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 17x + 12}{3x^3 + 14x^2 + 3x - 20} \geqslant 0.$

   Factoriser puis pensez à faire un tableau de signe. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $]-\infty;-4[\cup]-4;-\frac{5}{3}[\cup[\frac{3}{2};+\infty[$.