1- Définitions

fonction numérique de deux variables

Définition : On appelle fonction numérique de deux variables toute application f d'une partie $D \subset \mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$f \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \mapsto z. & \end{array} \quad \text{et } z = f(x,y).$$

Définition : L'ensemble de définition d'une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ est l'ensemble de tous les couples (x, y) de $\mathbf{R}^2$ pour lesquels on peut déterminer une image par f, il peut être représenté par une portion du plan.

Définition : Soit f une fonction de 2 variables définie sur un domaine D, et soit $a = (x_0, y_0)$ un point de D, on peut définir en a 2 fonctions partielles de f (qui sont des fonctions d'une variable) :

$$f_{\bullet,y_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_{x_0,\bullet} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array} \right.$$

Définition : On appelle surface représentative de f l'ensemble des points $\{(x, y, f(x, y))/(x, y) \in D\}$, D est l'ensemble de définition de la fonction f.

On appelle courbe ou ligne de niveau λ les éléments de D tels que $f(x, y) = \lambda$.

2- Limite, continuité

Définition : Un **pavé ouvert** de $\mathbf{R}^2$ est un sous-ensemble P de $\mathbf{R}^2$ de la forme $P =]a, b[\times]c, d[$ où a, b, c, d sont 4 réels tels que $a < b$ et $c < d$.

Définition : On dira qu'un couple (x, y) tend vers 0 si la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ tend vers 0.

Définition : Soit f une fonction définie sur P un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$ à valeurs réelles. Elle est continue sur P si pour tout élément $(a, b) \in P$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Théorème : Toutes les fonctions polynomiales, rationnelles, ou composées des fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, ...) sont continues sur leur ensemble de définition.

3- Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert

Définition : Soit f une fonction définie sur un pavé ouvert P de $\mathbf{R}^2$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur P si les dérivées partielles premières de f sont définies et continues en tout point de P.

Définition : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert P, et soit $A(a, b)$ un point de P. Le gradient de f au point A est le vecteur défini par $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$.

Remarque : Le gradient de f au point A s'écrit également $\nabla f(A)$.

Variation élémentaire au voisinage d'un point.

Théorème : Pour de petites variations, on a $\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b) \approx \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y$ c'est-à-dire que $f(x, y) - f(a, b) - \left(h \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$ lorsque h et k tendent vers 0.

Définition : Soit f une fonction définie sur un pavé ouvert dont le gradient au point $A(a, b)$ est non nul. Le plan passant par A et orthogonal à $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$ est le **plan tangent** à la surface représentative de f au point de coordonnées $\big(A, f(A)\big)$.

Dérivation des fonctions composées

Théorème : Soient x et y deux fonctions d'une variable définies et dérivables sur un intervalle de $I \subset \mathbf{R}$ et f une fonction de deux variables, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $x(I) \times y(I)$, telle que $f\Big(x(t), y(t)\Big)$ soit défini sur I. Alors la fonction F définie par $t \longmapsto f\Big(x(t), y(t)\Big)$ est dérivable sur I et l'on a :

$$\forall a \in I,\ F'(a) = x'(a) \times \frac{\partial f}{\partial x}\Big((x(a), y(a)\Big) + y'(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}\Big((x(a), y(a)\Big).$$

Théorème de Schwarz

Définition : Soit f définie sur un pavé ouvert P ; f est de classe $\mathscr{C}^2$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont définies et continues sur P.

Théorème : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un pavé ouvert P, on a : $\forall(a, b) \in P,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$.