Résolution numérique d'équations

L'objet du TP est de trouver une solution, si elle existe à l'équation $f(x) = 0$.
En plus de trouver la solution, on s'intéresse aussi à la qualité de l'algorithme c'est à dire à sa rapidité.

Méthode par balayage

La méthode par balayage consiste à partir du point a, à progresser par pas p jusqu'à ce que la fonction change de signe.

Remarque : : en moyenne, il faudra parcourir la moitié de l'intervalle, le nombre d'itérations est donc $\lfloor\dfrac{b-a}{2p}\rfloor$. Si on veut une solution comprise entre 0 et 1 à 0,001 près par balayage, il faut compter 500 pas.
On peut améliorer la méthode en commençant par un pas de 1, puis quand on a dépassé la solution, on recule et on recommence en divisant le pas par 10 jusqu'à arriver à la précision souhaitée. Dans ce cas, pour chaque valeur de p (0.1, 0.01, 0.001) il faut compter à chaque fois, en moyenne, 5 pas, au total 15 pas !

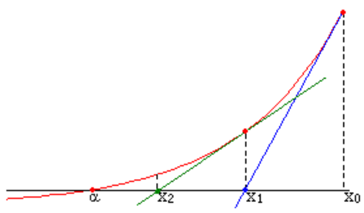
Méthode par dichotomie

Dans la méthode par dichotomie, on considère que si $f(a).f(b) < 0$ alors a et b encadrent la solution x et qu'en général $c = \dfrac{a+b}{2}$ est en général une meilleure approximation de x.
On pourra réitérer le procédé si l'on connaît le signe de $f(c)$.
On construit ainsi deux suites
- $a_0 = a,\ b_0 = b$
- a_n et b_n sont construit par récurrence de la façon suivante à partit de $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
  - Si $f(a_n)f(c_n) >= 0,\ a_{n+1} = c_n\ ;\ b_{n+1} = b_n$
  - Si $f(a_n)f(c_n) < 0,\ a_{n+1} = a_n\ ;\ b_{n+1} = c_n$

Les deux suites sont adjacentes et forment un encadrement de la solution x.
À chaque étape, l'intervalle entre a et b est divisé par 2, donc $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ et le nombre d'itération pour obtenir la solution à p près vérifie $n = \lfloor\dfrac{\ln(b-a) - \ln p}{\ln 2}\rfloor$. Pour le cas précédent, on trouve 10 (p=0.001,b=1,a=0)
Remarque : On peut soit programmer une boucle FOR ou une boucle WHILE avec la condition d'arrêt $|b_n - a_n| \leqslant p$.

Le principe

La méthode de Newton est basée sur des idées simples :
- On trouve une solution approchée de $f(x) = 0$ en remplaçant la courbe par sa tangente.
- Si x_0 est une valeur approchée de la solution x, on construit une meilleure approximation x_1 en utilisant la tangente T au point $M(x_0, f(x_0))$.
- En réitérant ce procédé, on définit une suite (x_n) qui tend vers la solution x. On s'arrête dès que l'on peut affirmer que $|x_n - x| < p$.



Considérons la tangente en x_0 à $\mathcal{C}_f$, son équation est $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.
L'intersection avec l'axe $0x$ donne $x_1 =$ tel que $0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
On construit alors la suite définie par la récurrence suivante en répétant ce procédé. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
et on montre que cette dernière converge vers la racine de f.
Indication :
- on calcule une valeur approchée de la dérivée en x_0 sans connaître l'expression de f à l'aide de l'approximation

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

- La plupart du temps, on n'a pas la valeur de x, donc la condition d'arrêt sera $|x_{n+1} - x_n| < p$ ou à $p/10$ par précaution mais rien ne vous permet d'affirmer, sans calcul supplémentaire que x_n est bien une solution à p près.

Remarque : Si dans la méthode par dichotomie, la précision est de l'ordre de $\dfrac{b-a}{2^n}$ alors on montre que sous certaines conditions la précision par la méthode de Newton est de l'ordre de $\dfrac{b-a}{2^{2^n}}$.