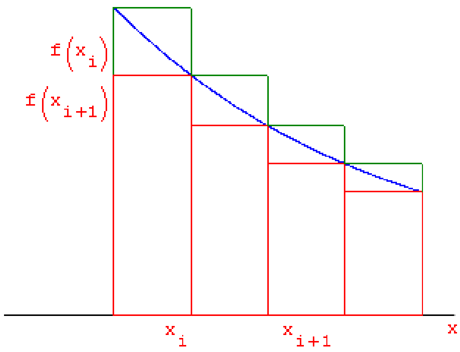
Calcul intégral : Aire - Euler

Calcul d'intégrales par la méthode des rectangles

Principe On veut calculer $\int_a^b f(t)\ dt$. Pour cela, on divise le segment [a,b] en n parties égales définissant ainsi une suite $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Alors $p = \dfrac{b-a}{n}$; $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \simeq p \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kp)$.

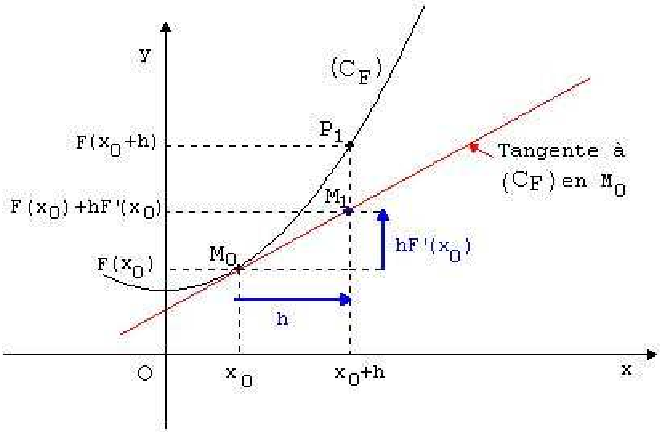
Python L'algorithme revient à calculer une somme avec l'indice k variant de 0 à n-1

Amélioration Il existe d'autres méthodes : méthode des trapèzes, méthode de Simpson donnant de bien meilleurs résultats et se basant également sur des sommes coefficientées des $f(a+kp)$.

Méthode d'Euler

Principe La méthode d'Euler permet d'obtenir une valeur approchée de l'image d'une fonction en un point (valeur de $F(b)$) lorsque la fonction elle-même n'est pas connue explicitement, mais en connaissant sa valeur en un autre point ($F(a)$) et sa dérivée ($F'(a)$ ou une équation différentielle d'ordre 1 permettant de calculer cette dérivée $F'(a)$ connaissant a et $F(a)$). C'est une méthode numérique élémentaire de résolution d'équations différentielles du premier ordre, de la forme

$$\forall x \in I, \text{ intervalle de } \mathbf{R}\,,\ F'(x) = u(x, F(x)),\ u \text{ une fonction réelle à deux variables.}$$



Concrètement la méthode d'Euler repose sur trois idées idées :

- si on connaît a et $F(a)$, on peut calculer $F'(a) = u(a, F(a))$.
- En confondant la courbe avec sa tangente, on peut obtenir une valeur approchée $F(\beta) \simeq F(\alpha) + (\beta - \alpha)F'(\alpha)$ (approximation affine de la fonction).
- La réitération du procédé précédent : $F(b)$ s'obtient en n pas $(x_0 = a, y_0 = F(a)) \to (x_1, y_1) \to (x_2, y_2) \to \ldots (x_n = b, y_n = F(b)$, chaque y_i étant calculé en utilisant la formule précédente.

  Au final, on obtient deux suites $i \in [\![0, n]\!]$: $pas = \dfrac{b-a}{n}$

  $x_i = a + i.pas$; $y_0 = F(a)$ et $y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)F'(x_i) = y_i + pas.u(x_i, y_i)$.

Python Cela revient à calculer deux suites les (x_i) et les (y_i) définies par récurrence

Amélioration Si on conservait les différentes valeurs de x et de y, on pourrait tracer une courbe approximant la courbe représentative de F

Amélioration La résolution de l'équation permettant le calcul de $f'(a)$ peut être difficile mais Python offre des fonctions de résolution d'équation ...