Sommes-Produits

Les résultats sont valables sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

1- Symboles somme et produit Soient p et n des entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Soient x_p, x_{p+1},..., x_n, $n-p+1$ scalaires. Alors on note

■$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = x_p + x_{p+1} + ... + x_n$; ■$\displaystyle\prod_{k=p}^{n} x_k = x_p \times x_{p+1} \times \cdots \times x_n$.

Remarques : Si l'ensemble des indices est vide, la somme est nulle, le produit vaut 1.

$x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n$ (resp. $x_{p+1} \times \cdots \times x_n$) est l'écriture en extension de la somme (resp. produit).

2- Règles de calcul pour les sommes et produits

Soient p et n des entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Soient x_p, x_{p+1},..., x_n, y_p, y_{p+1},..., y_n des scalaires.

■ $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=p}^{n} y_k$; ■ $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} x_k$; ■ Si $p \leqslant i < n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{i} x_k + \sum_{k=i+1}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{n} x_k$.

■ $\displaystyle\prod_{k=p}^{n}(x_k + y_k) = \prod_{k=p}^{n} x_k \times \prod_{k=p}^{n} y_k$; ■ $\displaystyle\prod_{k=p}^{n}(\lambda x_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} x_k$; ■ Si $p \leqslant i < n$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{i} x_k \times \prod_{k=i+1}^{n} x_k = \prod_{k=p}^{n} x_k$.

3- Quelques sommes à connaître

►$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

►$\forall a \in_R$ (ou $\mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geqslant m$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} a = (p-m+1)a$; $\displaystyle\prod_{k=m}^{p} a = a^{p-m+1}$.

►Si $q \neq 1$, $q \neq 0$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$; si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

4- Factorisation de $a^n - b^n$

– $\forall a, b$ scalaires, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

– Généralisation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a, b$ scalaires, $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$.

5- Factoriels

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle `factorielle` n et on note $n!$ l'entier défini par : $0\,!$=1 et pour $n \geqslant 1$, $n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Propriété : ■$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$; ■$\forall n \in \mathbb{N}^* n! = n(n-1) \times (n-2)! \ldots$

■$\forall n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}, 0 \leqslant p \leqslant n, n \times (n-1) \ldots (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

6- Sommes doubles

Définition : $\displaystyle\sum_{i}\sum_{j} u_{i,j} = \sum_{i}\left(\sum_{j} u_{i,j}\right) = \sum_{j}\left(\sum_{i} u_{i,j}\right)$

Comme toute somme, on peut intervertir l'ordre des indices mais attention aux bornes

Propriétés :

– $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{n} u_{i,j}$ (les bornes de i et j ne dépendent pas de i et j).

– $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} u_{i,j} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} u_{i,j}$ (on doit toujours avoir $j \leqslant i$).

7- Coefficients binomiaux

Définition : Soient p et n deux entiers naturels, si $0 \leqslant p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, sinon $\dbinom{n}{p} = 0$.

Proposition : ■si $0 \leqslant n$, $\dbinom{n}{0} = 1$, si $1 \leqslant n$, $\dbinom{n}{1} = n$. ■$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \{0, 1, ..., n\}$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

■$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \{1, ..., n\}$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$. ■$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$ (Pascal).

Théorème : Formule du binôme de Newton —. $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque : Si on pose $a = 1, b = x$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.