1- Suites convergentes

Définitions : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall\epsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbf{N}\ \ (n\geqslant n_0\Rightarrow|u_n-\ell|\leqslant\epsilon)$$

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite $+\infty$ ou diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si

$$\forall A\in\mathbf{R}\,,\ \exists n_0\in\mathbf{N}\ \ (n\geqslant n_0\Rightarrow u_n\geqslant A(\text{ resp.}u_n\leqslant A)$$

Propriétés des suites convergentes

1. Si une suite converge, sa limite est unique
2. Toute suite convergente est bornée
3. Si u une suite convergente et si $\exists n_0\in\mathbf{N}\,,\ \forall n\geqslant n_0, a\leqslant\ u_n$ alors $a\leqslant\lim u_n$
4. Si u une suite convergente et $a<\lim u_n$, alors $\exists n_0,\ \forall n\geqslant n_0, a<\ u_n$.
5. Si $\lim u>0$, alors $\exists n_0,\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n\geqslant 0$
6. Soient u et v deux suites convergentes vérifiant à partir d'un certain rang $u_n\geqslant v_n$, on a alors $\lim u_n\geqslant\lim v_n$
7. Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la limite de la suite.
8. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ alors la suite (u_n) converge vers ℓ

2- Théorèmes de convergence

1. Soient (u_n) une suite convergente de limite ℓ et f une fonction de la variable réelle, définie au voisinage de ℓ et continue en ℓ, alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$
   On peut remplacer la continuité par des limites éventuellement infinies
2. Théorème de convergence par encadrement :
   Soient $u,\ v,\ w$ trois suites qui vérifient à partir d'un certain rang les inégalités $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$.
   Si u et w convergent vers la même limite ℓ, la suite v converge également vers ℓ
3. Théorème de la convergence dominée (ou des suites monotones)
   (a) Toute suite croissante majorée converge
   (b) Corollaire : toute suite croissante converge ou a pour limite $+\infty$
4. Suites adjacentes
   – Deux suites u et v sont adjacentes si u est croissante, v est décroissante et $\lim u-v=0$
   – Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite