Suites

1- Exemple de suites

Suites arithmétiques : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r \Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$. N.B. : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Suites géométriques : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_{n+1} = q.u_n \Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 q^n$. N.B. : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Suites arithmético-géométriques

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b \qquad (R)$
2. Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b et on a $u_n = u_0 + nb$
   Sinon, on cherche ℓ telle que $\ell = a\ell + b$
   La suite $u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a $\quad u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$

Récurrences linéaires d'ordre 2

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad b \neq 0$$

On appelle (E) l'équation associée $x^2 - ax - b = 0$ est un trinôme dont le discriminant noté $\Delta = a^2 + 4b$

- Si $\Delta > 0$, (E) possède deux solutions réelles distinctes q_1 et q_2 et il existe deux réels α et β tels que
  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$
- Si $\Delta = 0$, (E) possède une solution unique q et il existe deux réels α et β tels que
  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = (\alpha n + \beta)q^n$
- Si $\Delta < 0$, (E) possède deux solutions complexes conjuguées $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$ et il existe α, β réels tels que
  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \rho^n(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$

2- Suites convergentes

Définitions : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \epsilon)$$

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite $+\infty$ ou diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A(\text{ resp.}u_n \leqslant A)$$

Propriétés des suites convergentes

1. Si une suite converge, sa limite est unique
2. Toute suite convergente est bornée
3. Si u une suite convergente et si $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0, a \leqslant\ u_n$ alors $a \leqslant \lim u_n$
4. Si u une suite convergente et $a < \lim u_n$, alors $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0, a <\ u_n$.
5. Si $\lim u > 0$, alors $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 0$
6. Soient u et v deux suites convergentes vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \geqslant v_n$, on a alors $\lim u_n \geqslant \lim v_n$
7. Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la limite de la suite.
8. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ alors la suite (u_n) converge vers ℓ

3- Théorèmes de convergence

1. Soient (u_n) une suite convergente de limite ℓ et f une fonction de la variable réelle, définie au voisinage de ℓ et continue en ℓ, alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$
   On peut remplacer la continuité par des limites éventuellement infinies
2. Théorème de convergence par encadrement :
   Soient u, v, w trois suites qui vérifient à partir d'un certain rang les inégalités $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
   Si u et w convergent vers la même limite ℓ, la suite v converge également vers ℓ
3. Théorème de la convergence dominée (ou des suites monotones)
   (a) Toute suite croissante majorée converge
   (b) Corollaire : toute suite croissante converge ou a pour limite $+\infty$
4. Suites adjacentes
   - Deux suites u et v sont adjacentes si u est croissante, v est décroissante et $\lim u - v = 0$
   - Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite